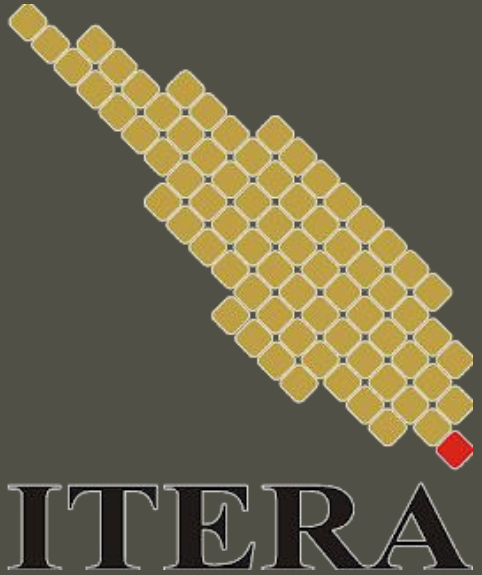




DISTRIBUSI VARIABEL ACAK KONTINYU

PERTEMUAN MINGGU KE-6
STATISTIK DAN PROBABILITAS
PRODI TEKNIK KELAUTAN

Tim Pengajar Statistika dan Probabilitas (Prodi Teknik Kelautan)

ATTENTION

This course material just is only addressed to ITERA students (specifically who take Probability and Statistics) with aim to support student learning and not intended to published.

Reference :

1. Ronald E. Walpole, et. al. 2012. Probability & Statistics for Engineers & Scientist 9th edition. Prentice Hall.
2. Yusuf Wibisono.2015. Metode Statistik. Gadjah Mada University Press.
3. Haldar, A. , Mahadevan, S. 2000. Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design. John Wiley & Sons, Inc. United States of America.
4. Diktat Kuliah Statistika dan Probabilitas. Dr. Istiarto. Universitas Gadjah Mada.

Outline



- Distribusi Normal
 - ▣ Distribusi normal
 - ▣ Kurva pdf distribusi normal
 - ▣ Distribusi normal standar
 - ▣ Tabel Distribusi Normal Standar

Pendahuluan

- Pada perkuliahan ini hanya akan difokuskan pada pembahasan aplikasi dari distribusi normal (disebut juga Distribusi Gauss)
- Fungsi distribusi peluang dari variabel kontinyu lainnya
 - ▣ Distribusi eksponensial dan Gamma
 - ▣ Distribusi Chi-squared
 - ▣ Distribusi Lognormal
 - ▣ Distribusi Weibull

Pendahuluan

Kita kembali mengingat Kasus pada distribusi binomial yang lalu

□ Contoh 1

- ▣ Setiap tahun dalam 5 tahun dilakukan pemilihan acak untuk menetapkan alokasi dana kepada 1 dari 4 kegiatan (A, B, C, D).
- ▣ Setiap kali dilakukan pemilihan, masing-masing kegiatan memiliki peluang yang sama untuk terpilih dan mendapatkan dana.
- ▣ Berapa persen peluang kegiatan A mendapatkan dana $5x$, $4x$, $3x$, $2x$, $1x$, $0x$?

Penyelesaian Contoh 1

□ Setiap kali pemilihan

▣ Prob (As) = Probabilitas kegiatan A terpilih

$$\text{Prob (As)} = \frac{1}{4} = 0,25 = p$$

▣ Prob (Ag) = Probabilitas kegiatan A tidak terpilih

$$\text{Prob (Ag)} = 0,75 = 1 - p = q$$

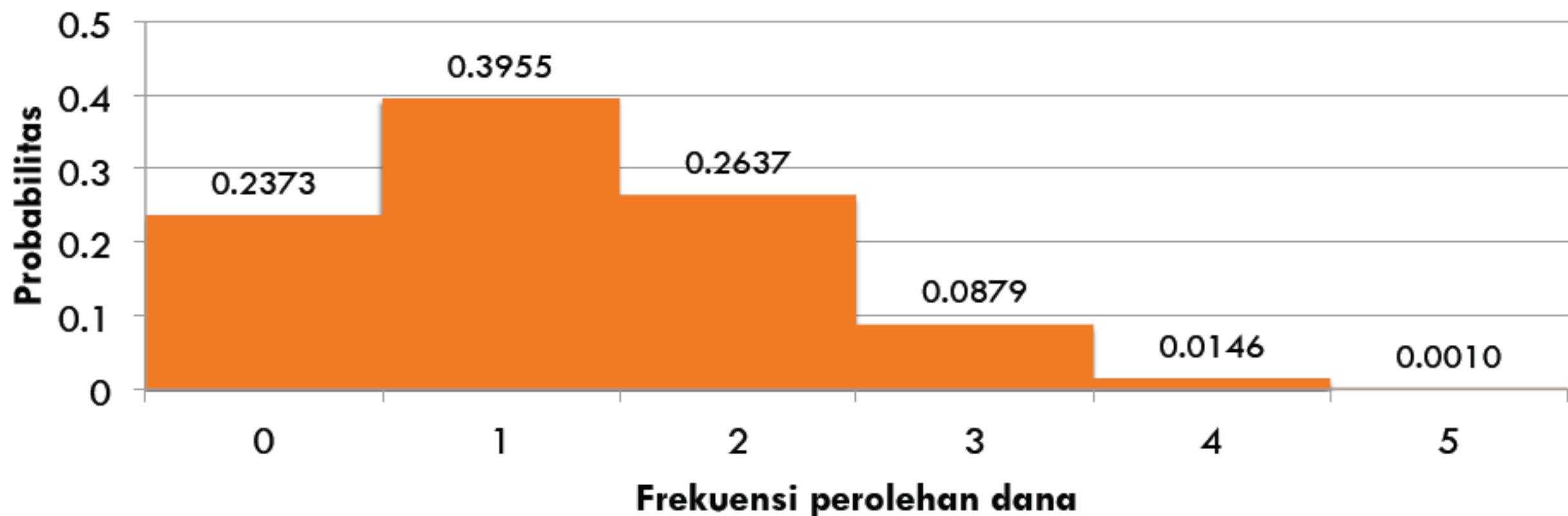
□ Dalam 5x pemilihan, probabilitas kegiatan A mendapatkan dana 3x adalah

$$f_x(x; n, p) = f_x(3; 5, 0.25) = \binom{5}{3} 0.25^3 (1 - 0.25)^{5-3} = 0.0879$$

$$= \text{BINOM.DIST}(3, 5, 0.25, \text{FALSE})$$

Jumlah sukses	Jumlah cara sukses	Probabilitas
0	1	0.237
1	5	0.396
2	10	0.264
3	10	0.088
4	5	0.015
5	1	0.001
Jumlah =		1.000

Distribusi probabilitas kegiatan A mendapatkan dana



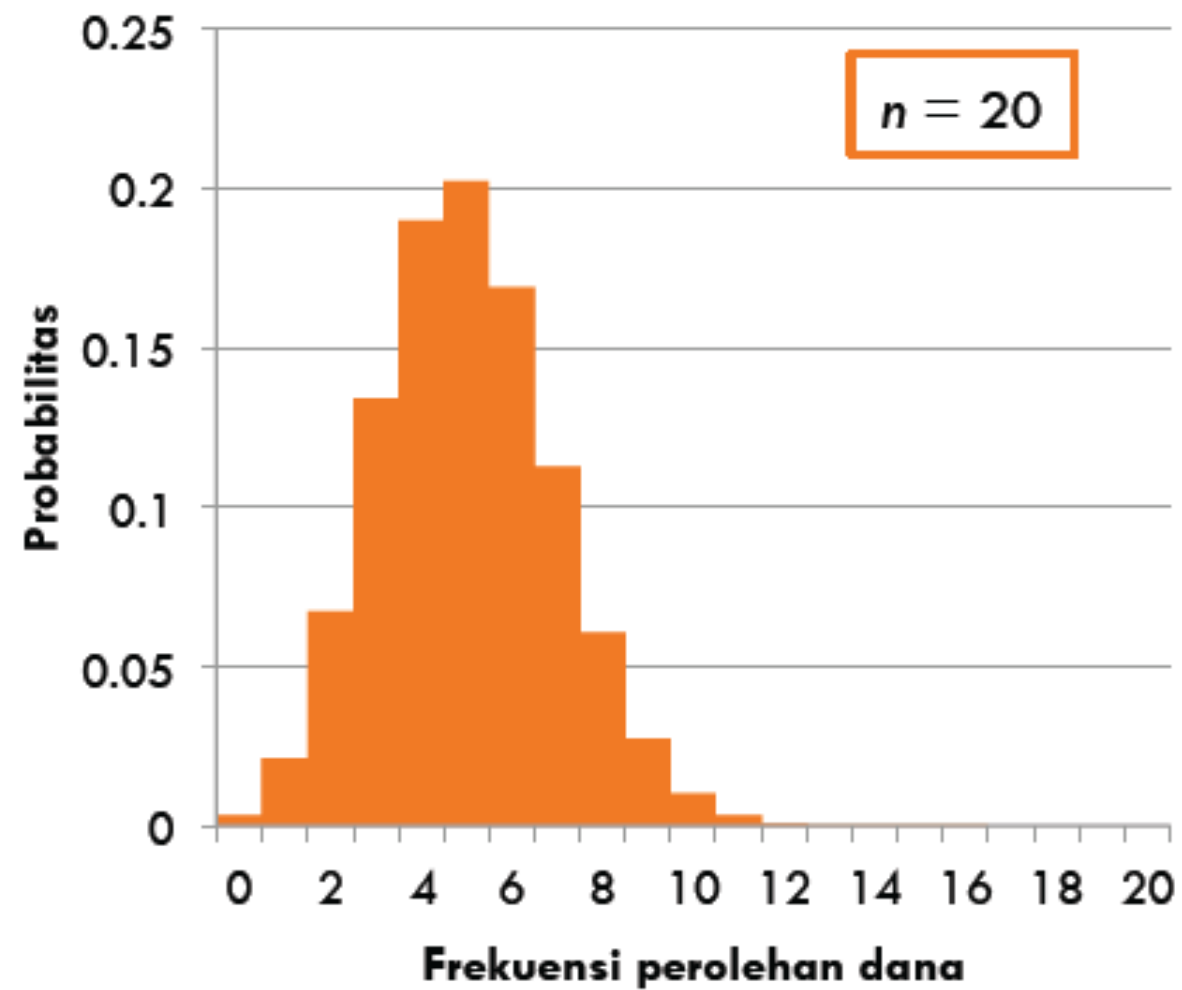
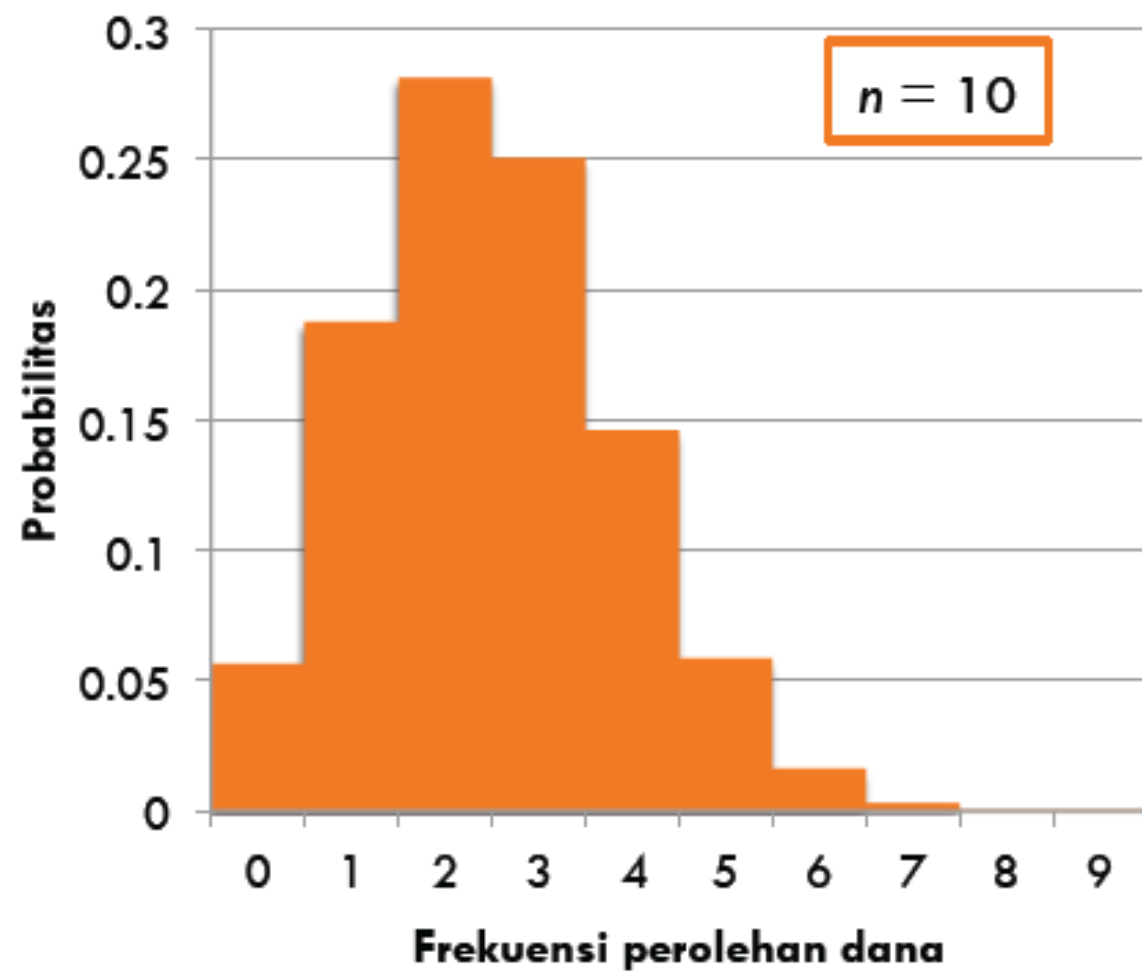
□ Apabila pemilihan dilakukan untuk waktu yang lebih panjang

▣ 10 tahun

▣ 20 tahun

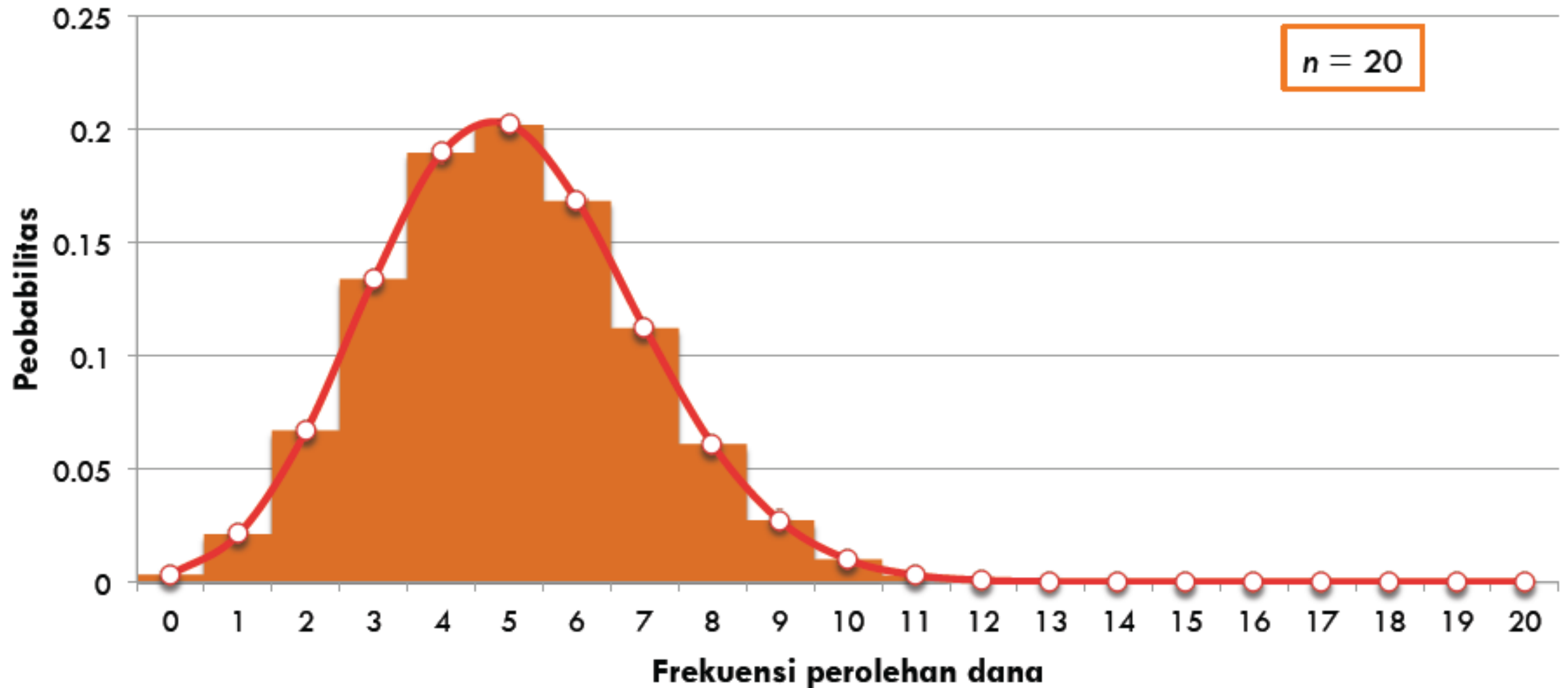
▣ n tahun

Maka diperoleh $n+1$ kemungkinan hasil

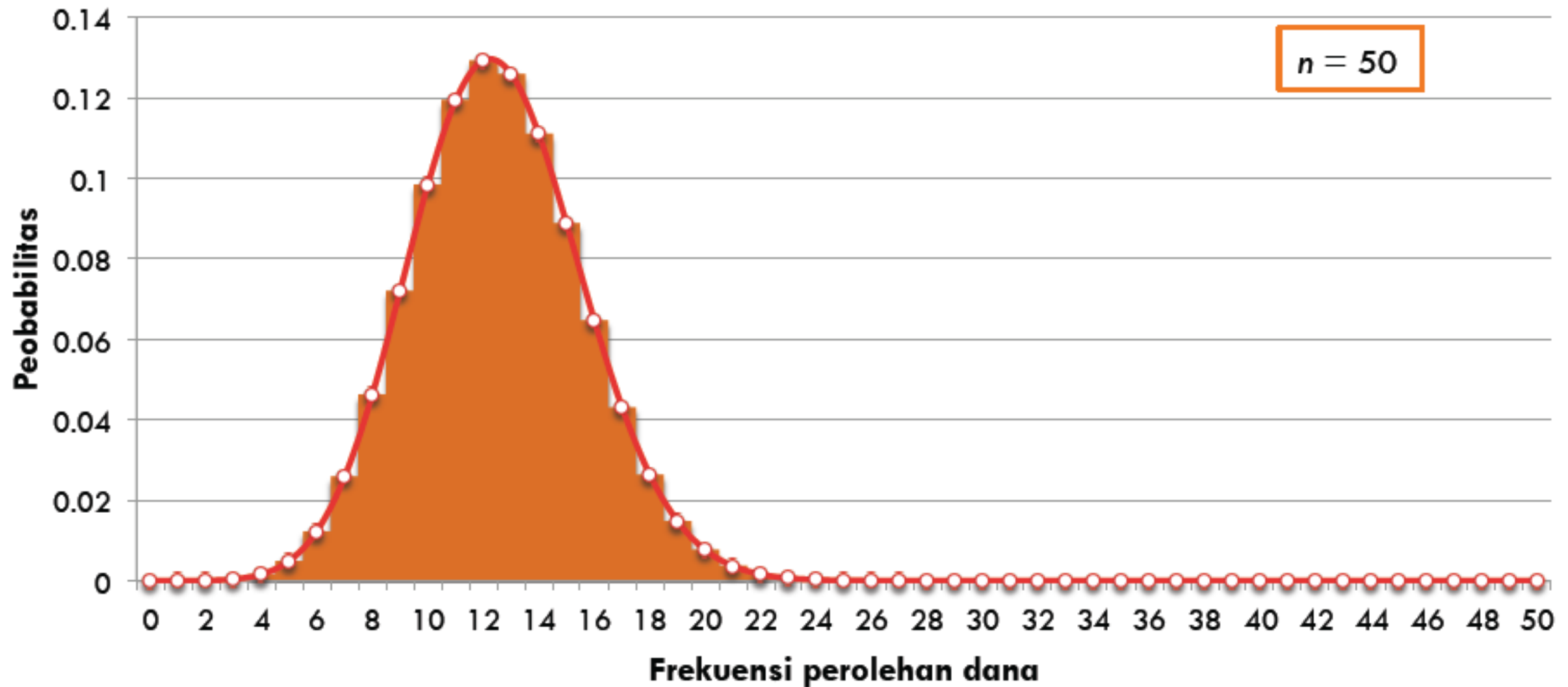


- Apabila pemilihan (eksperimen) dilakukan sejumlah n kali, dimana n semakin besar
 - ▣ Histogram distribusi probabilitas “Kegiatan A memperoleh dana” memiliki selang interval kecil
 - ▣ Garis yang melewati puncak-puncak histogram membentuk kurva mulus berbentuk seperti lonceng.
 - ▣ Disebut **Kurva Normal**

Distribusi probabilitas kegiatan A mendapatkan dana



Distribusi probabilitas kegiatan A mendapatkan dana





Distribusi Normal

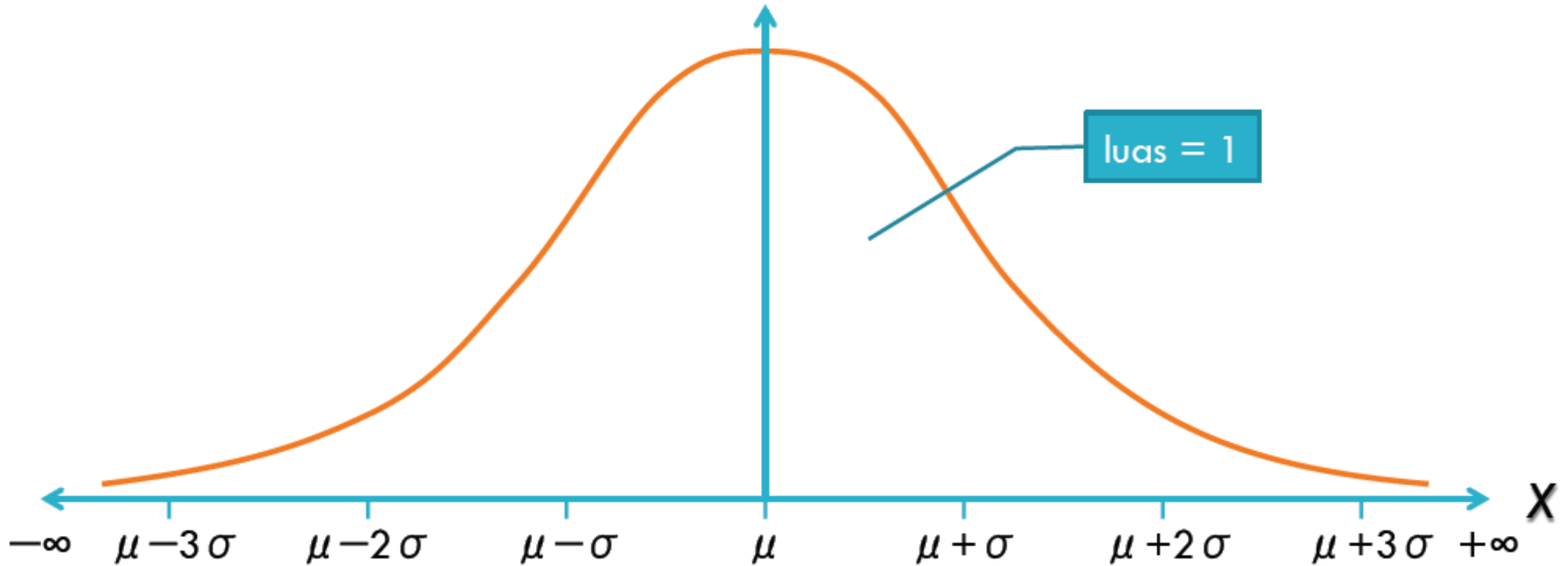
Kurva Normal dan Distribusi Normal

- Kurva Normal
 - ▣ Berbentuk seperti lonceng
 - ▣ Namun tidak setiap **kurva berbentuk lonceng** adalah kurva normal
 - ▣ Sering pula direferensikan sebagai **Distribusi Gaussian**
- Kurva normal menggambarkan distribusi normal
- Permasalahan distribusi binomial dapat diselesaikan dengan pendekatan distribusi normal
- Distribusi normal lebih mudah dilakukan daripada distribusi binomial karena karakteristik distribusi normal telah diketahui. Sehingga dapat dihitung dengan bantuan tabel atau fungsi matematis.

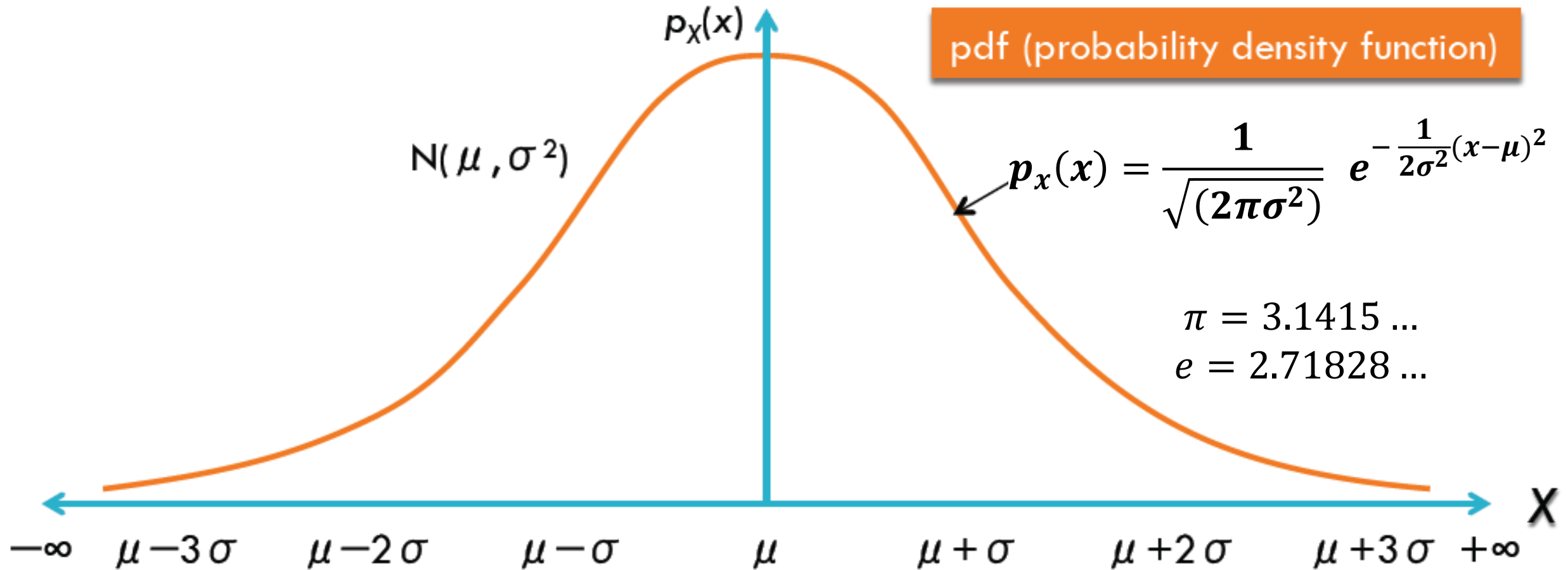
Karakteristik Kurva Distribusi Normal

- Simetris terhadap nilai rerata
- Nilai X mengumpul di sekitar nilai rerata
- Rentang nilai variabel X tak terbatas, namun sangat sedikit yang berada di luar rentang **3x simpangan baku dari nilai rerata**

Kurva Fungsi Distribusi Normal

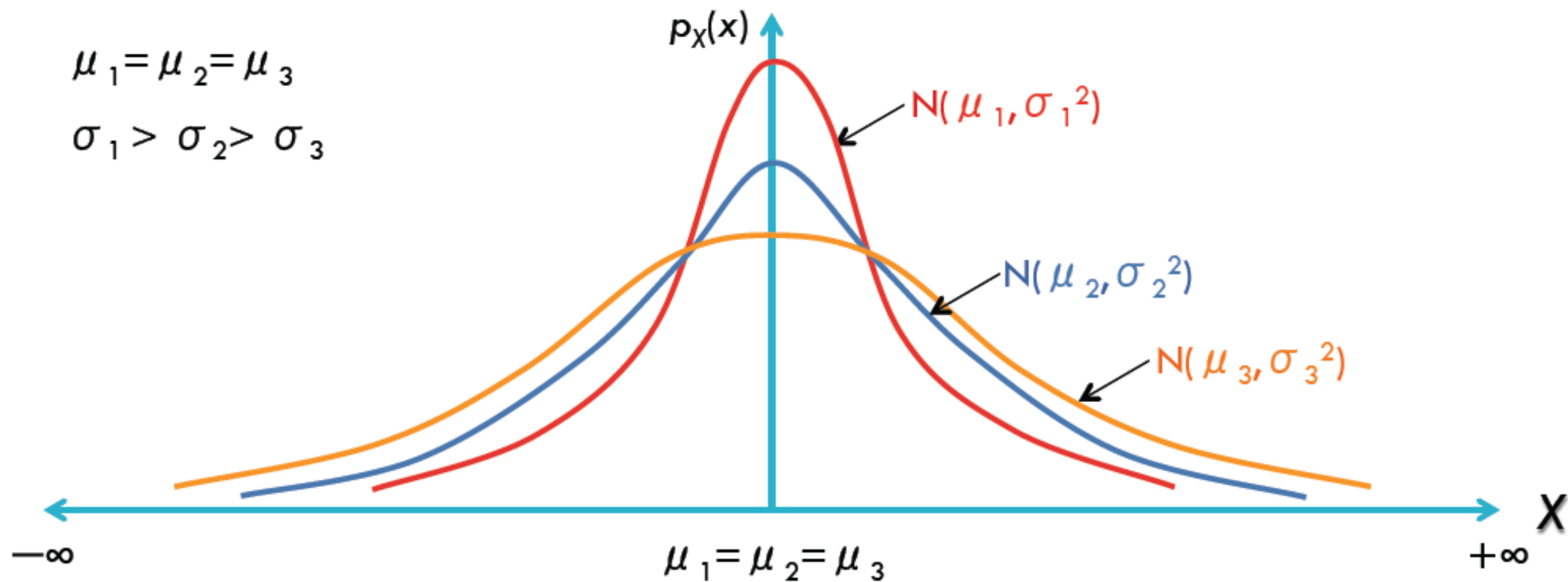


Kurva Fungsi Distribusi Normal (pdf)



$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$



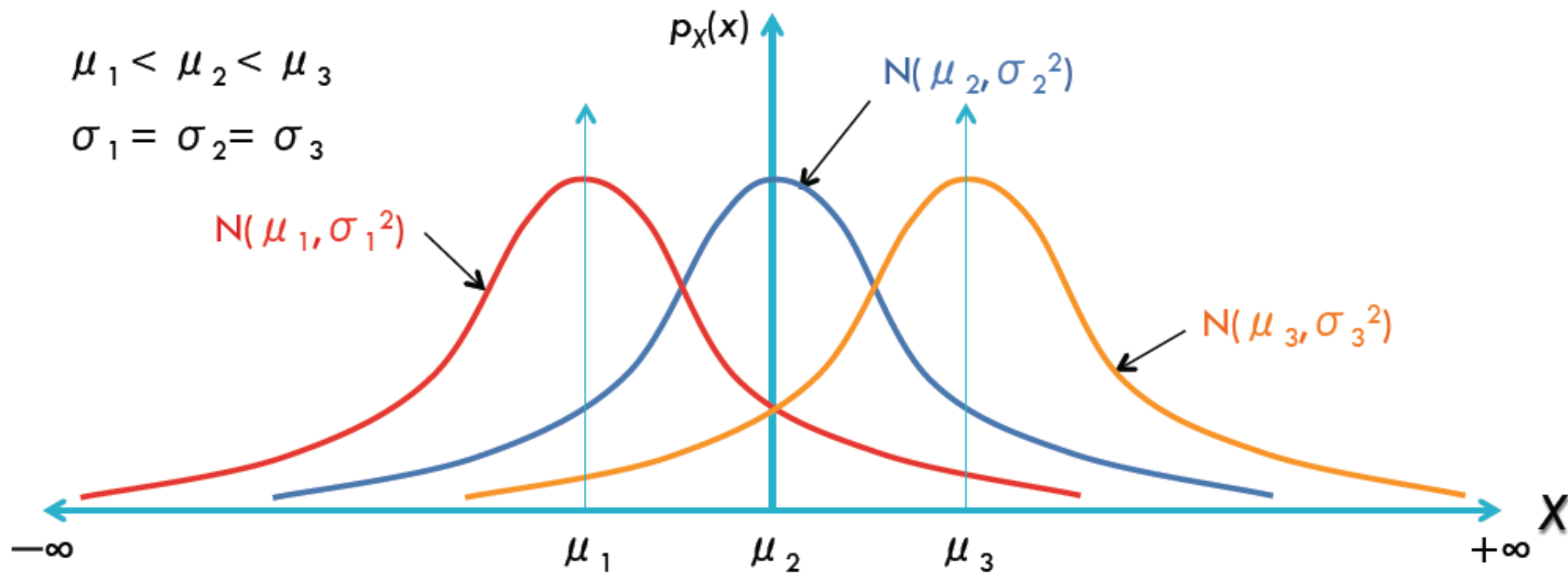
$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

$$N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$N(\mu_3, \sigma_3^2)$$

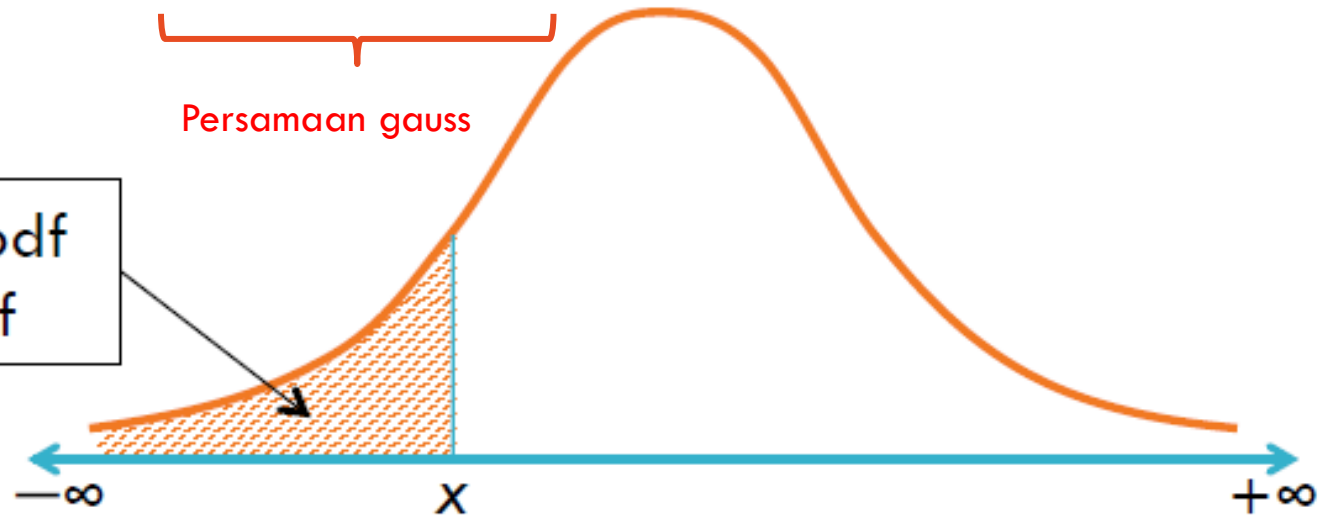


- Jika X berdistribusi normal, $N(\mu, \sigma^2)$, maka $\text{prob}(X \leq x)$ dapat dicari dengan:

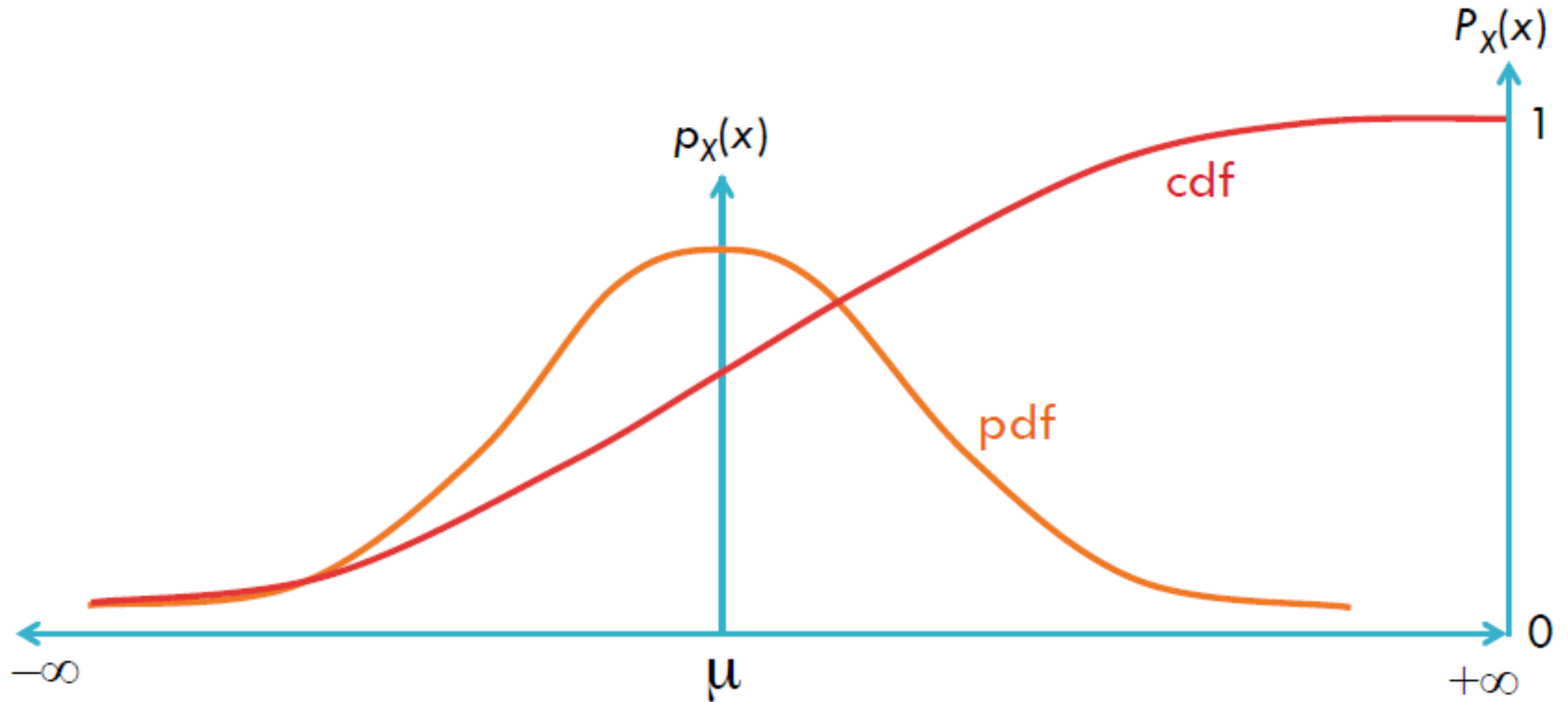
$$\text{prob}(X \leq x) = P_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt = \int_{-\infty}^x \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}}_{\text{Persamaan gauss}} dx$$

luas di bawah kurva pdf
(dari $-\infty$ s.d. x) $\rightarrow$ cdf

cdf (cumulative distribution function)



pdf - cdf



Distribusi Normal

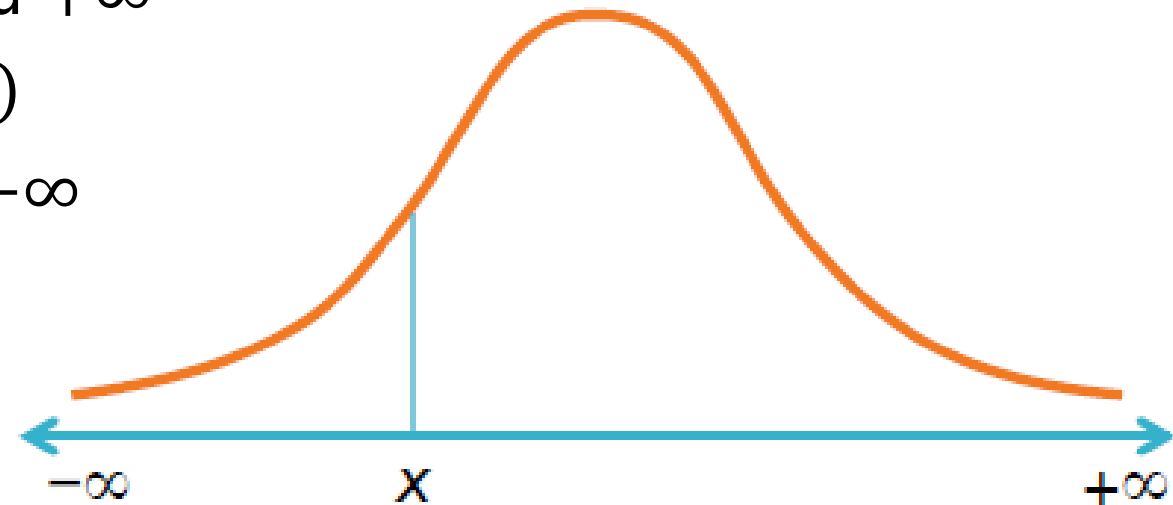
□ Luas di bawah kurva pdf

▣ Menunjukkan probabilitas suatu event

▣ $prob(X \leq x) = prob(-\infty \leq X \leq x)$
= luas di bawah kurva antara $-\infty$ s.d x

▣ $prob(-\infty \leq X \leq +\infty) = 1$
= luas di bawah kurva antara $-\infty$ s.d $+\infty$

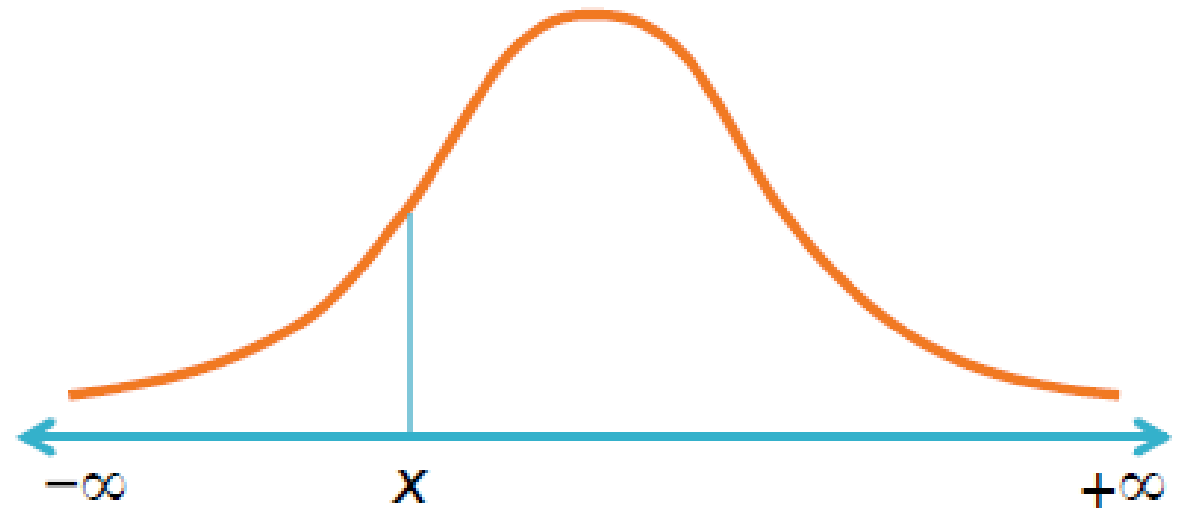
▣ $prob(X \geq x) = prob(x \leq X \leq +\infty)$
= luas di bawah kurva antara x s.d $+\infty$
= $1 - prob(X \leq x)$



□ Probabilitas

▣ $prob(X \leq \mu) = prob(X \geq \mu) = 0,50$

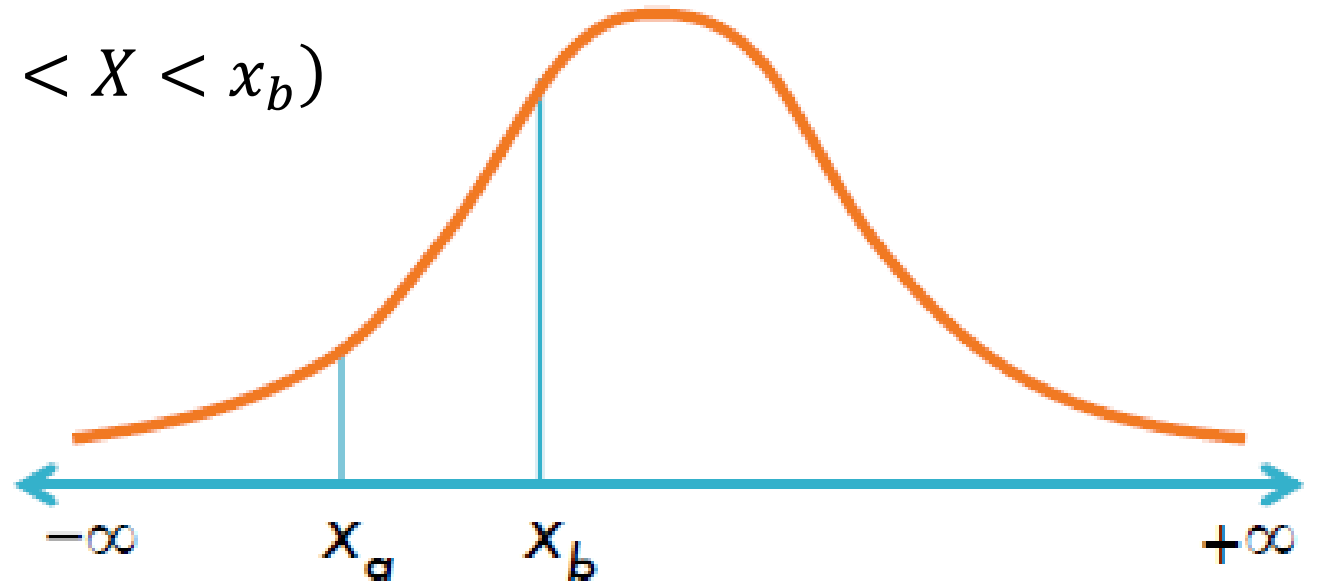
▣ $prob(\mu - x \leq X \leq \mu) = prob(\mu \leq X \leq \mu + x)$



□ Probabilitas

$prob(X = x) \rightarrow$ luas di bawah kurva antara x hingga x adalah sama dengan 0, maka

- $prob(X \leq x) = prob(X < x)$
- $prob(X \geq x) = prob(X > x)$
- $prob(x_a \leq X \leq x_b) = prob(x_a < X < x_b)$



Distribusi Normal Standar

- Distribusi normal disajikan dalam bentuk tabel **distribusi normal standar**

- Dinyatakan dalam variabel Z

$$Z_x = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- Z_x berdistribusi normal dengan $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$, $N(0,1)$
→ disebut **Distribusi normal standar**

Menghitung luas area di bawah kurva distribusi normal

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x; \mu, \sigma) dx = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

Untuk memudahkan pengguna dalam penyelesaian perhitungan integral tersebut, maka fungsi distribusi kumulatif diselesaikan menggunakan tabel distribusi normal.

Sehingga data pengamatan, variabel X , perlu ditransformasikan ke dalam variabel Z distribusi normal, dengan nilai mean = 0 dan simpangan baku = 1.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 \rightarrow z_1 \\ x_2 \rightarrow z_2 \end{array} \quad \rightarrow$$

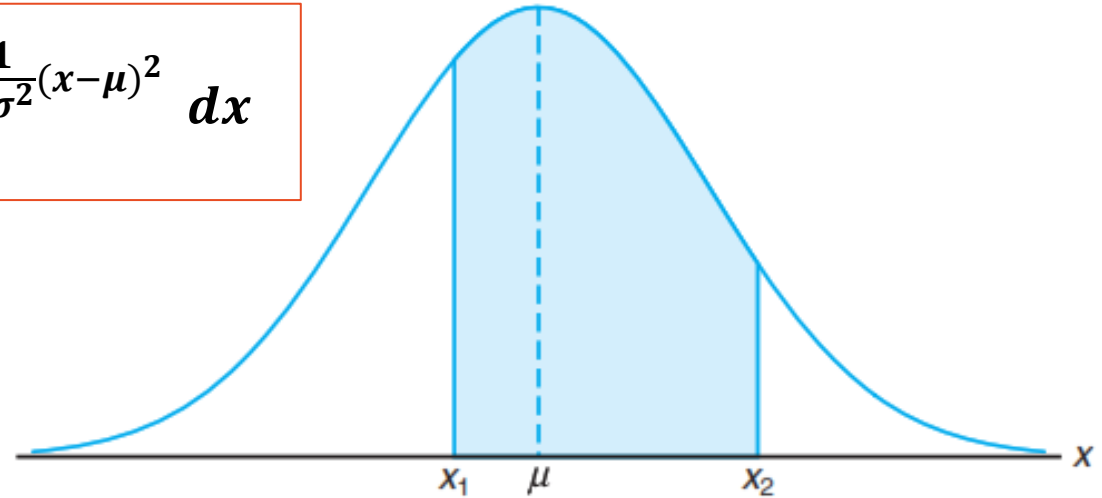
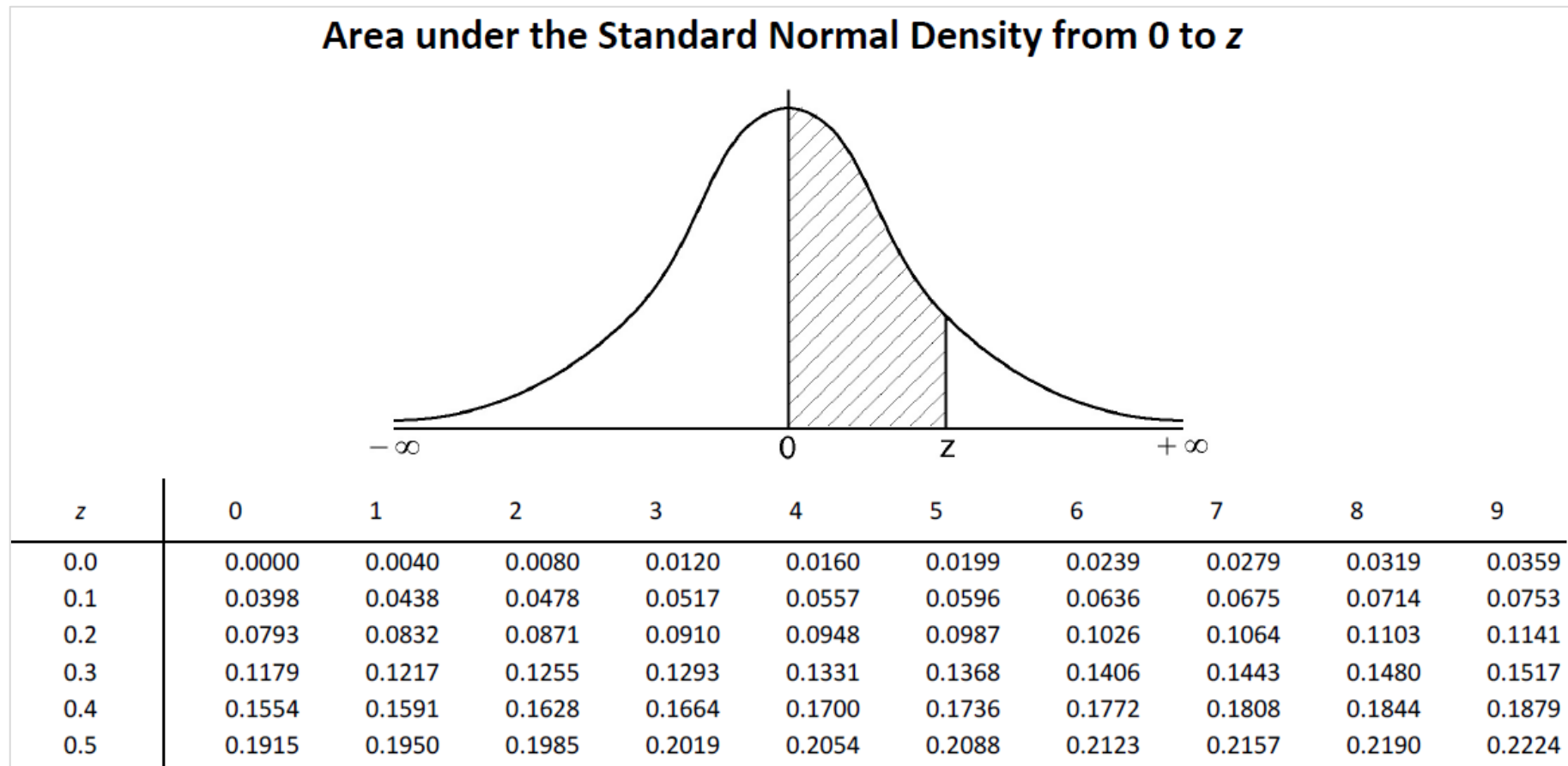


Figure 6.6: $P(x_1 < X < x_2) =$ area of the shaded region.

$$P(z_1 < Z < z_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}z^2} dz$$

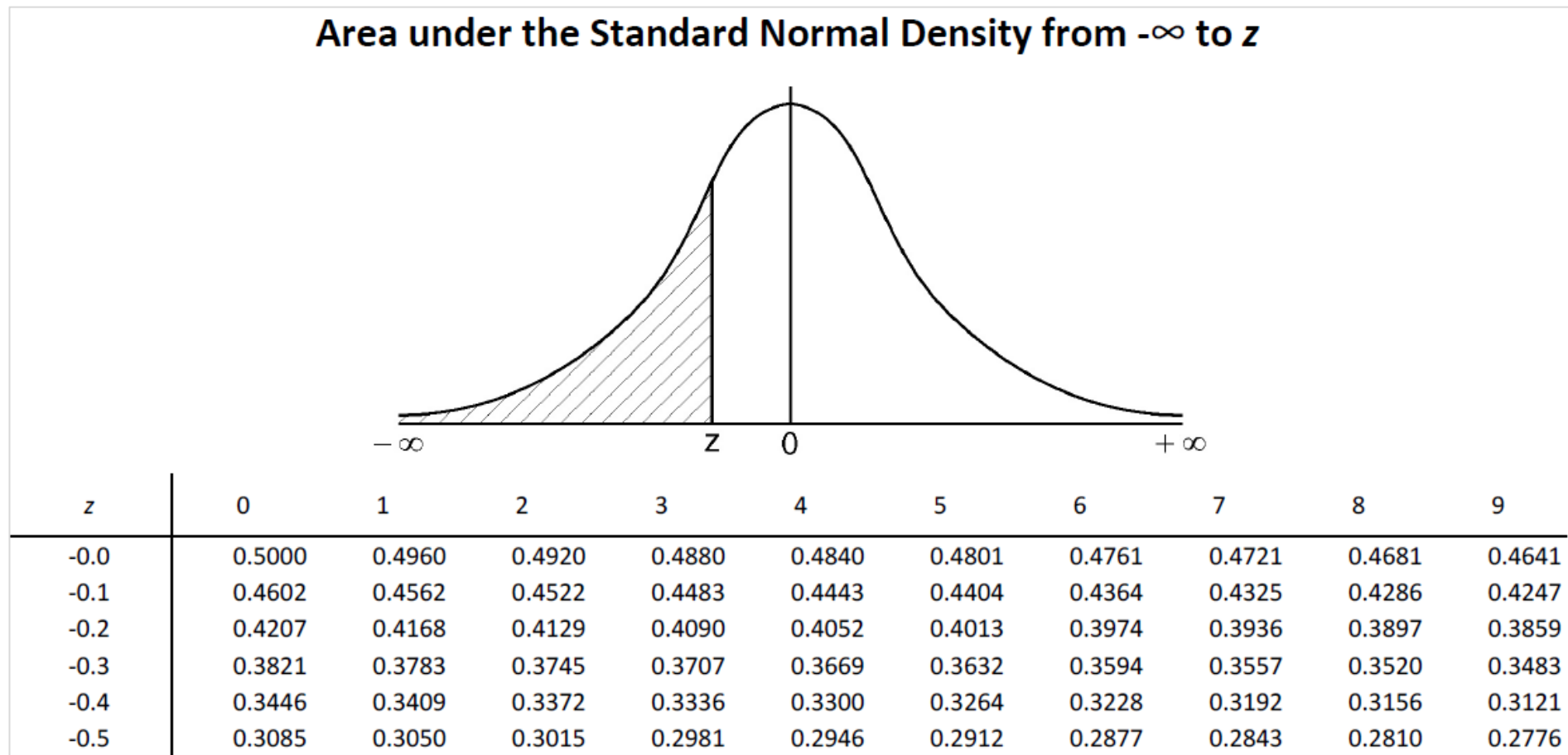
Tabel Distribusi Normal Standar (Tabel 1)

- Tabel Z vs luas di bawah kurva cdf (cumulative distribution function)
 - ▣ Luas kurva dari 0 s.d Z_x



Tabel Distribusi Normal Standar (Tabel 2)

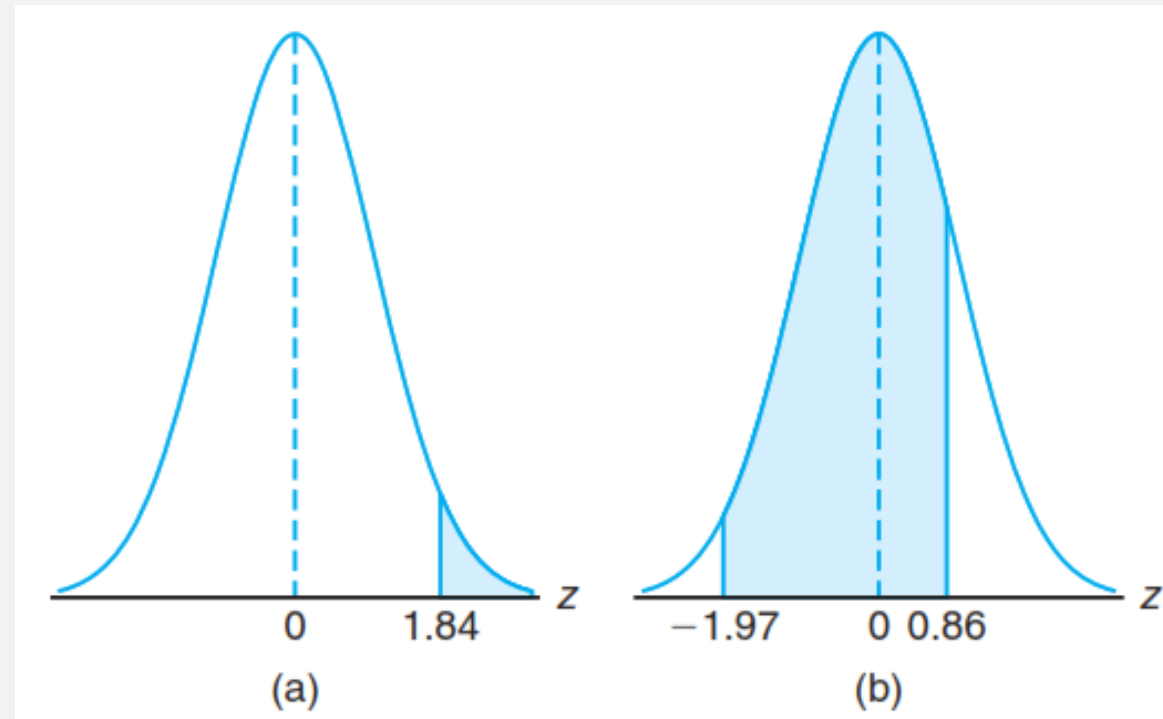
- Tabel Z vs luas di bawah kurva cdf (cumulative distribution function)
- ▣ Luas kurva dari $-\infty$ s.d Z_x



Contoh penggunaan tabel distribusi normal

Hitung luasan area yang diarsir dari kurva distribusi normal berikut

- a) Di sebelah kanan $z = 1.84 \rightarrow P(Z \geq (z = 1.84))$
- b) Di antara $z = -1.97$ dan $z = 0.86$



$$P(Z \geq (z = 1.84))$$

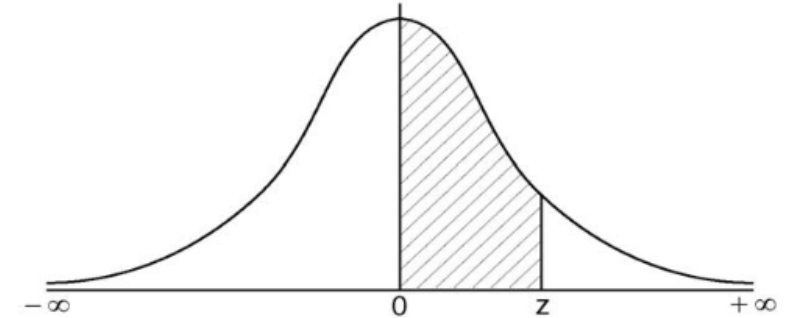
dengan tabel distribusi normal versi 1

- Karena $P(Z \geq 1.84)$ adalah $1 - P(Z \leq 1.84)$
- Dengan tabel versi 1 $P(Z \leq 1.84) = 0.4671$
- Namun perlu diperhatikan bahwa di sini $P(Z=0)$ adalah 0. Dimana pada distribusi normal nilai $P(X = \mu) = 0.5$. Dengan demikian $P(Z \leq 1.84) = 0.4671 + 0.5$
- $P(Z \leq 1.84) = 0.9671$
- Sehingga,

$$P(Z \geq 1.84) = 1 - P(Z \leq 1.84)$$

$$= 1 - 0.9671 = \mathbf{0.0329}$$

Area under the Standard Normal Density from 0 to z

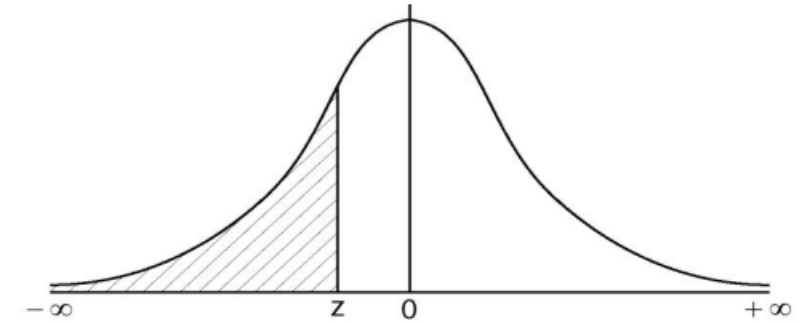


z	0	1	2	3	4	5	6	7
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756

$P(Z \geq (z = 1.84))$
dengan tabel distribusi normal versi 2

- Distribusi normal adalah simetris, sehingga $P(Z \geq 1.84)$ adalah $P(Z \leq -1.84)$
- Dengan tabel versi 2 $P(Z \leq -1.84) = \mathbf{0.0329}$

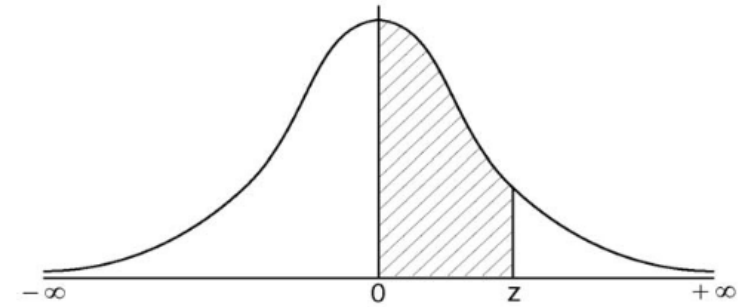
Area under the Standard Normal Density from $-\infty$ to z



z	0	1	2	3	4	5	6	7
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192

$$P(-1.97 \leq Z \leq 0.86)$$

dengan tabel distribusi normal versi 1



- Karena $P(-1.97 \leq Z \leq 0.86)$ terletak di antara $P(Z \geq -1.97)$ dan $P(Z \leq 0.86)$
- Maka tabel distribusi normal digunakan untuk mencari kedua nilai tersebut
- $P(Z \geq -1.97) = 1 - (P(Z \leq 1.97) + 0.5)$

$$= 1 - (0.4756 + 0.5) = 0.0244$$
- $P(Z \leq 0.86) = 0.3051 + 0.5 = 0.8051$

Maka,

- $P(-1.97 \leq Z \leq 0.86) = P(Z \leq 0.86) - P(Z \leq -1.97)$

$$= 0.8051 - 0.0244$$

$$= 0.7807$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	.1700	0.1736	0.1772	0.1808
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808

$$P(-1.97 \leq Z \leq 0.86)$$

dengan tabel distribusi normal versi 2

□ Karena $P(-1.97 \leq Z \leq 0.86)$ terletak di antara $P(Z \leq -1.97)$ dan $P(Z \leq 0.86)$

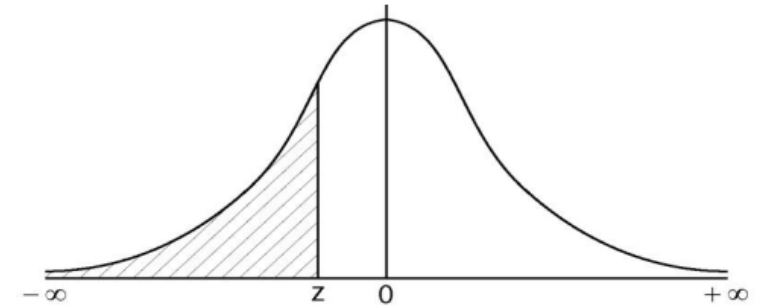
□ Maka tabel distribusi normal digunakan untuk mencari kedua nilai tersebut

$$□ P(Z \leq -1.97) = 0.0244$$

$$\begin{aligned} □ P(Z \leq 0.86) &= 1 - P(Z \leq -0.86) \\ &= 1 - 0.1949 \\ &= 0.8051 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} □ P(-1.97 \leq Z \leq 0.86) &= P(Z \leq 0.86) - P(Z \leq -1.97) \\ &= 0.8051 - 0.0244 \\ &= 0.7807 \end{aligned}$$

Area under the Standard Normal Density from $-\infty$ to z



z	0	1	2	3	4	5	6	7
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192

Perintah (Fungsi) MSExcel

- Distribusi normal standar

- ▣ NORM.S.DIST(z, TRUE)

- menghitung nilai cdf distribusi normal standar

- ▣ NORM.S.DIST(z, FALSE)

- menghitung nilai pdf distribusi normal standar

- ▣ NORM.S.INV(probability)

- kebalikan dari NORM.S.DIST(z)

- mencari nilai z apabila probabilitasnya diketahui

- Dimana untuk distribusi normal standar

- ▣ Mean = 0

- ▣ Simpangan baku = 1

Latihan Soal 1

Suatu variabel random X berdistribusi normal.

Data memiliki nilai rerata 12, dan simpangan baku 3.

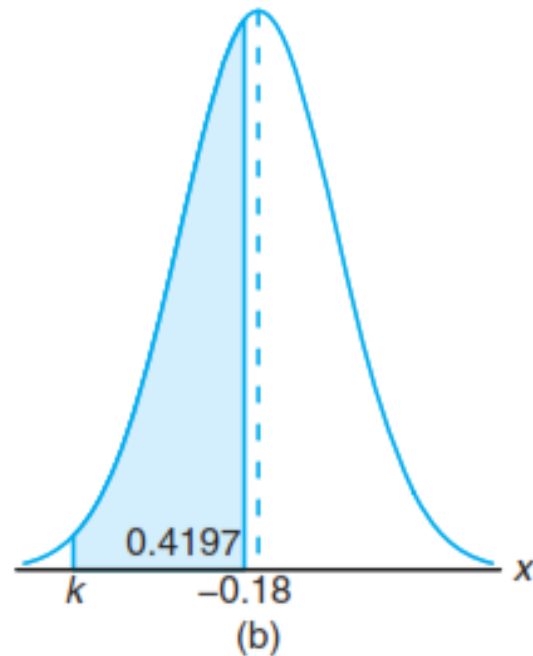
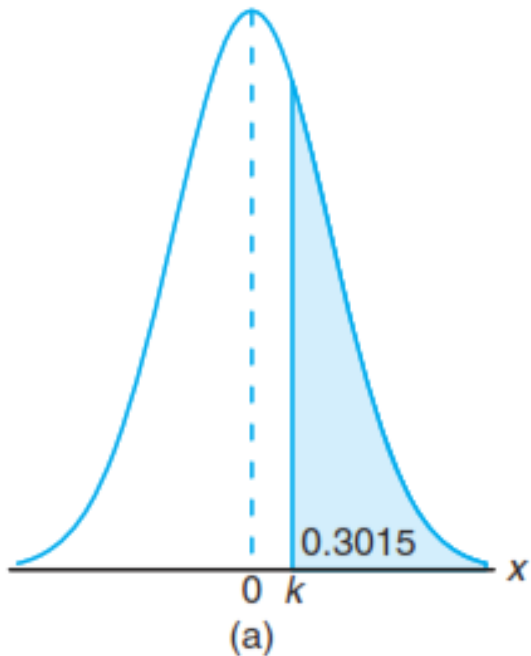
- Dengan menggunakan tabel, Tentukan
 - ▣ Prob ($X < 15$)
 - ▣ Prob ($X < 9$)
 - ▣ Prob ($9 < X < 15$)

Latihan Soal 2

Tentukan nilai k dari data berdistribusi normal , apabila

(a) $P(Z > k) = 0.3015$ and

(b) $P(k < Z < -0.18) = 0.4197$.

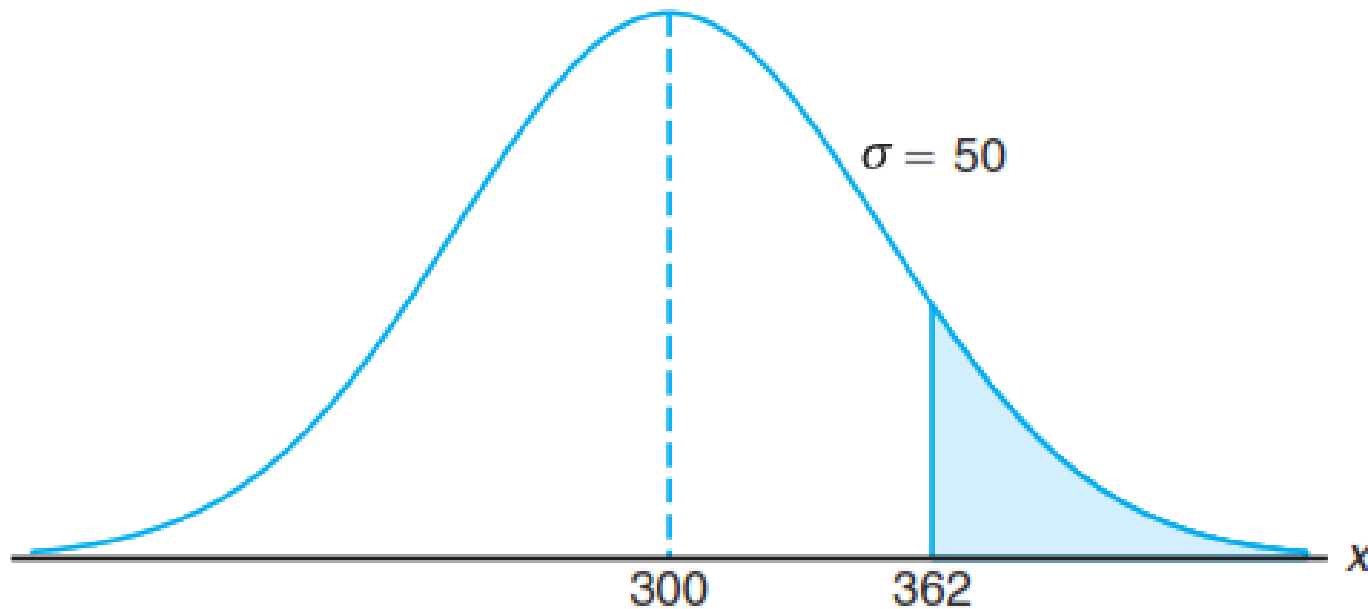


Latihan Soal 3

Suatu data variabel random X berdistribusi normal, dengan $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$. Tentukan peluang dimana X berada antara $x = 45$ dan $x = 62$, atau $P(45 \leq x \leq 62)$

Latihan Soal 4

Suatu data variabel random X berdistribusi normal, dengan $\mu = 300$ dan $\sigma = 50$. Tentukan peluang dimana X memiliki nilai lebih dari 362



Latihan Praktik Komputasi

1. Kerjakan Latihan soal 1 hingga Latihan soal 4, menggunakan bantuan formula excel.

Soal bonus (tambahan)

Dengan menggunakan formula dalam excel, **buatlah kurva distribusi normal mu sendiri**